

Clase 3: Leyes de Kepler

Tres reglas que siguen todos los planetas, comprobadas con el N-cuerpos

Simulación de N-cuerpos (método de Verlet) durante 24 años, 56317 pasos; error relativo de energía $7.4e-08$. Motor MHD-INT v5.2.2.

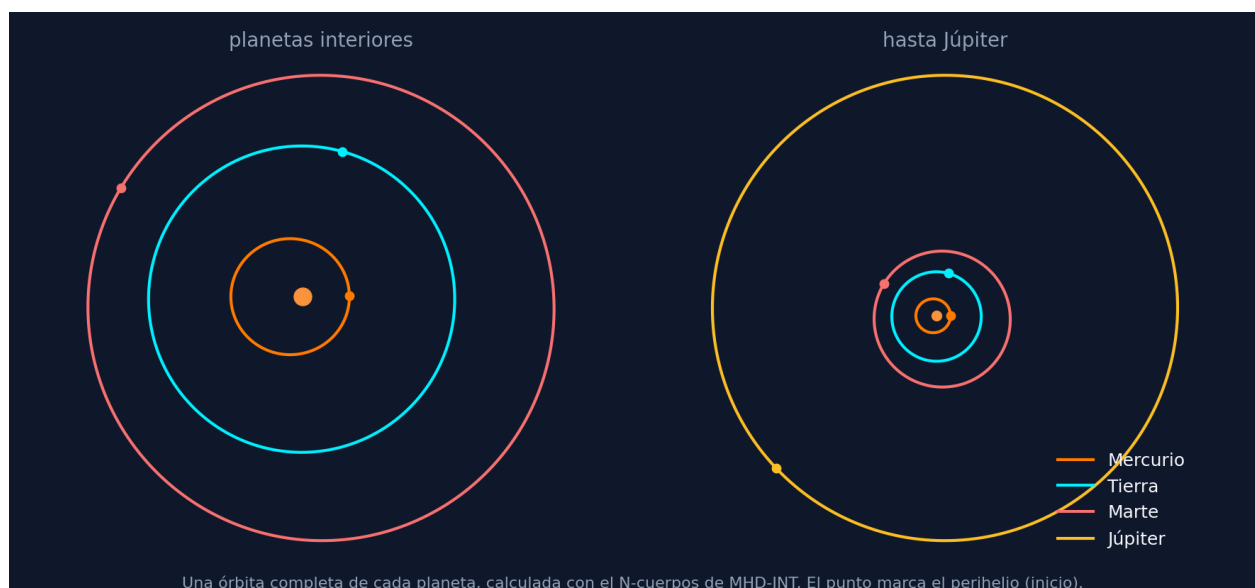
Objetivos

- Enunciar las tres leyes de Kepler
- Comprobarlas con una simulación de N-cuerpos
- Saber por qué un integrador numérico es confiable (conservación de la energía)

1. Leyes de Kepler

A comienzos del siglo diecisiete, Johannes Kepler descubrió tres reglas que siguen todos los planetas. En esta clase las vamos a comprobar con una simulación de N-cuerpos: un cálculo que aplica la gravedad entre el Sol y los planetas, paso a paso, sin darle ninguna de esas tres reglas de antemano.

2. Primera ley: elipses



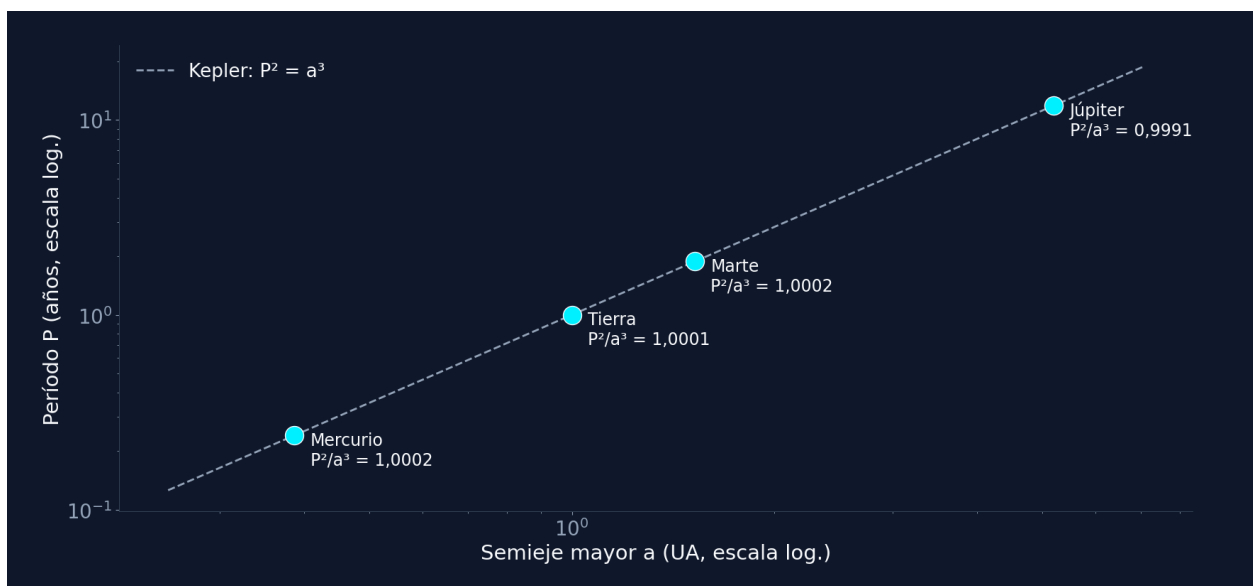
La primera ley dice que los planetas se mueven en elipses, con el Sol en uno de los focos. Simulamos el Sol con Mercurio, la Tierra, Marte y Júpiter, cada uno con su excentricidad real. Mercurio, el más excéntrico, se acerca hasta 0,307 unidades astronómicas y se aleja hasta 0,467. La geometría de una elipse con su semieje y su excentricidad predice 0,307 y 0,467. La simulación coincide.

3. Segunda ley: áreas iguales



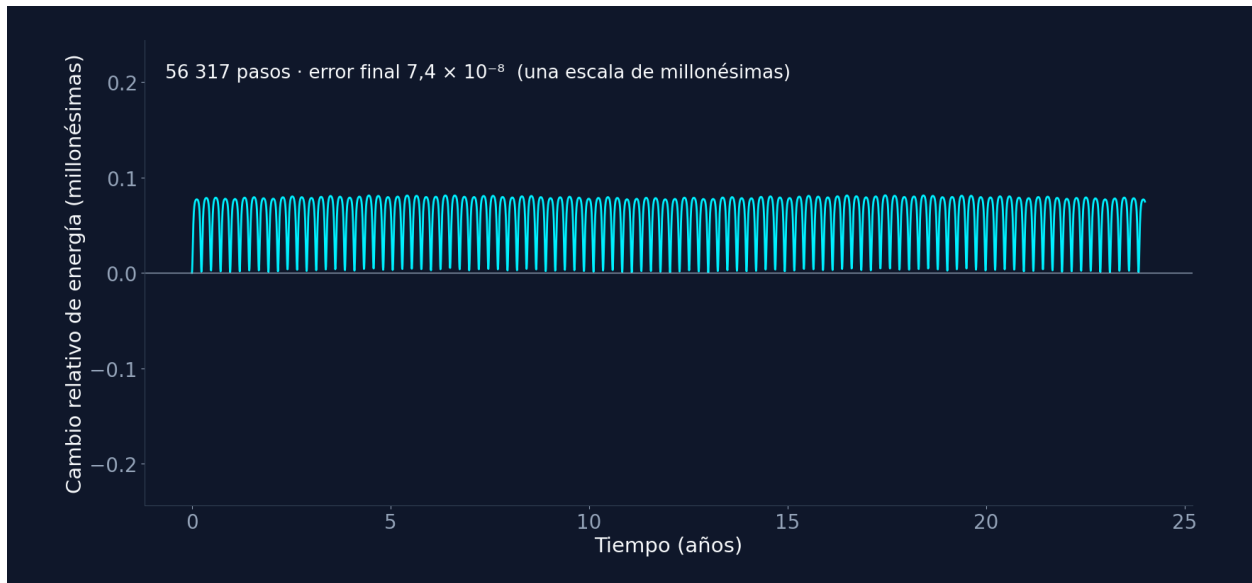
La segunda ley dice que la línea que une al Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. En la figura, cada sector coloreado corresponde al mismo intervalo de tiempo de la órbita de Mercurio, y todos tienen la misma área. La consecuencia es que el planeta va más rápido cuando está cerca del Sol. En la simulación, Mercurio va 1,52 veces más rápido en el perihelio que en el afelio, y la teoría predice 1,52.

4. Tercera ley: períodos y distancias



La tercera ley relaciona el tiempo que tarda un planeta en dar la vuelta con su distancia: el cuadrado del período es proporcional al cubo del semieje. Si medimos el período en años y la distancia en unidades astronómicas, para los planetas del Sol esa razón vale uno. En la simulación, Mercurio tarda 0,2408 años y Júpiter 11,86, y la razón da 1,0002 y 0,9991. Casi setenta años después, en 1687, Newton explicó por qué: la gravedad disminuye con el cuadrado de la distancia.

5. ¿Por qué confiar en el cálculo?



¿Cómo sabemos que la simulación es confiable? Una prueba clásica es la energía: en un sistema aislado, la energía total no puede cambiar. El N-cuerpos de MHD-INT usa el método de Verlet, que está diseñado para conservarla muy bien. Después de 56 317 pasos y 24 años simulados, la energía cambió apenas 0,07 millonésimas de su valor. Fíjense en la forma de la curva: sube y baja con cada vuelta de Mercurio, pero no se aleja de cero. Esa es la marca de un buen integrador. Si el error creciera sin parar, sería la señal de que el paso de tiempo es demasiado grande.

6. Para practicar

Para practicar: con la tercera ley, calcula cuánto tarda en dar la vuelta al Sol un planeta que está a cuatro unidades astronómicas. Después compara la velocidad de la Tierra en enero, cuando está más cerca del Sol, con la de julio. Nos vemos en la próxima clase.

Datos de la simulación

Planeta	a (UA)	e	Período (años)	P^2/a^3	r mín-máx (UA)
Mercurio	0.3870	0.2056	0.2408	1.0002	0.307-0.467
Tierra	1.0000	0.0167	1.0000	1.0001	0.983-1.017
Marte	1.5240	0.0934	1.8816	1.0002	1.381-1.667
Jupiter	5.2030	0.0489	11.8628	0.9991	4.949-5.458

Ejercicio

1. Con $P^2 = a^3$ (años y UA), calcula el período de un planeta a 4 UA del Sol.
2. Con $(1+e)/(1-e)$, calcula cuánto más rápido va la Tierra en el perihelio (enero) que en el afelio (julio). Usa $e = 0,0167$.
3. Si tienes MHD-INT PRO, abre el modo N-cuerpos y mide el período de Marte.

Limitaciones del modelo

- La simulación incluye solo el Sol y cuatro planetas; los demás se omiten para hacerla rápida.

- Las posiciones iniciales son elegidas (cada planeta arranca en su perihelio), no las posiciones reales de una fecha; el modo Efemérides de MHD-INT PRO usa las reales de JPL.
- Es gravedad newtoniana: no incluye la relatividad general, que explica una pequeña precesión extra del perihelio de Mercurio (43 segundos de arco por siglo).

Referencias

- Kepler (1609), *Astronomia Nova*; Kepler (1619), *Harmonices Mundi*.
- Newton (1687), *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.
- Hairer, Lubich & Wanner (2003), Geometric numerical integration illustrated by the Störmer-Verlet method, *Acta Numerica* 12.